EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

33e JAARGANG 1957/58
X - 15 JULI 1958

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (*f* 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. D. N. van der Neut te Zeist.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DIFFERENTIAALMEETKUNDE [1])

door

PROF. DR. N. H. KUIPER

1. *Enige stellingen uit de globale differentiaalmeetkunde.*

In de theorie van krommen en oppervlakken in de gewone euclidische ruimte zowel als algemeen, kan men zich beperken tot eigenschappen in een eventueel telkens kleiner te kiezen omgeving van een punt. Daaronder vallen b.v. de krommingen van krommen en oppervlakken, alsmede het geodetisch zijn van een kromme op een oppervlak. De aldus beperkte theorie heet lokale differentiaalmeetkunde. Hoewel deze lokale theorie veler belangstelling heeft, is de voornaamste interesse van anderen thans verschoven naar de zgn. globale differentiaalmeetkunde, waarin verband gelegd wordt tussen de lokale invarianten van een ruimte enerzijds en de topologische struktuur anderzijds.

Om een voorbeeld te geven beschouw ik een vlakke gesloten convexe differentieerbare kromme.

(1) $\qquad x(s) \quad x$ vektor, $\; s$ booglengte

Is $\varphi(s)$ de hoek die de raakvektor $\dot{x}(s)$ met een vaste richting maakt, dan is de kromming per definitie

$$\varrho = \frac{d\varphi}{ds}$$

en dit is $\geqq 0$ in figuur 1.
Gemakkelijk ziet men nu in dat

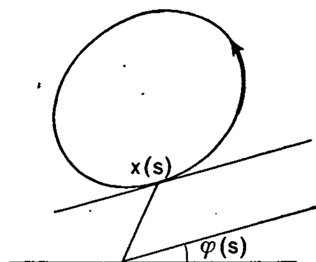


Fig. 1.

[1]) Voordracht, gehouden op 26 augustus 1957 tijdens de Vakantiecursus van het Mathematisch Centrum.

$$(2) \qquad \oint |\varrho|\, ds = \oint \frac{d\varphi}{ds}\, ds = \oint d\varphi = 2\pi.$$

Algemeen geldt echter

Stelling (*Fenchel* [1]) Dan en alleen dan wanneer een differentieerbare gesloten kromme in een euclidische ruimte ***vlak en convex*** is, geldt

$$(2) \qquad \oint |\varrho|\, ds = 2\pi.$$

Bij een passende interpretatie van het linkerlid geldt de bewering ook voor gesloten krommen die differentieerbaar zijn behoudens in een eindig aantal punten, in het bijzonder dus voor (gesloten) veelhoeken in de ruimte.

Opgave (1): Bewijs de stelling voor gesloten veelhoeken in de ruimte met volledige inductie naar het aantal hoekpunten.

Een gesloten differentieerbare kromme in de driedimensionale ruimte E^3 kan zo zijn, dat een homeomorfe afbeelding van E^3 op E^3 bestaat die de kromme afbeeldt op een cirkel. Per definitie van „knoop" is er dan geen knoop in de kromme. (Men zegt ook wel dat de cirkel de „triviale knoop" heeft). Nu geldt de *Stelling* (*Fary-Milnor* [2.37]): Heeft een gesloten differentieerbare kromme in E^3 een knoop dan is

$$(3) \qquad \oint |\varrho|\, ds \geqq 4\pi.$$

(Veralgemeend door *Chern* en *Lashof* [4,5])

Ik beschouw vervolgens het gewone bolopppervlak (2-sfeer) met vergelijking

$$(4) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Aan differentieerbare krommen op de bol kan een booglengte s worden gegeven volgens de formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

m.a.w.

$$\text{lengte} = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}\, ds.$$

Lokaal kan men coördinaten u en v invoeren waarmee

$$ds^2 = E du^2 + 2F\, du\, dv + G dv^2.$$

De lengte van krommen hiermee gevonden is natuurlijk de ge-

wone lengte zoals men die ook vindt, indien men dezelfde kromme als kromme in de euclidische ruimte met uitverkoren coordinaten x, y, z beschouwt.

Men kan echter ook een *andere* positief definiete kwadratische vorm ds^2 op S^2 definiëren, en men zou zich kunnen afvragen of men dan steeds de gegeven 2-sfeer in E^3 continu kan veranderen eindigende in een (homeomorf) oppervlak waarvoor de gegeven meegenomen lengten juist de lengten in de euclidische ruimte E^3 zijn.

Is de totale kromming in elk punt positief, dan kan dat inderdaad (*H. Weyl* [6]). Eist men slechts dat het uiteindelijk oppervlak van de klasse van de differentieerbaarheid C^1 is, dan kan het altijd (Kuiper [7]). Maar in dit laatste geval kan men niet meer over krommingen spreken!

Een andere vraag is, of men op de 2-sfeer wellicht een dusdanige metriek kan aanbrengen, dat elk punt een omgeving heeft die niet te onderscheiden is van een omgeving in een euclidisch vlak. Er zouden dan lokaal dus coördinaten u en v moeten zijn t.o. waarvan

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Stelling: Op de 2-sfeer is geen lokaal euclidische metriek mogelijk.

Bewijs: Stel er was een lokaal euclidische metriek op S^2. We verdelen S^2 dan in driehoeken met rechte zijden. Stel er zijn t_2 driehoeken, t_1 zijden en t_0 hoekpunten. Dan is de som van alle hoeken $t_2\pi = t_0 \,.\, 2\pi$.

Voorts ziet men gemakkelijk dat

$$2t_1 = 3t_2,$$

Dan is $\frac{1}{2}(2t_0 - 2t_1 + 2t_2) = - \chi = 0$.

Maar volgens een stelling van Euler, waarvan een speciaal geval bekend is in de stereometrie, is χ voor een bol steeds $- 2$. Onder de oriënteerbare gesloten oppervlakken heeft alleen de torus $\chi = 0$ en alleen daarop zal dus een lokaal euclidische metriek mogelijk kunnen zijn. Deze bestaat inderdaad:

abstract:

$$\varphi \bmod 2\pi,\ \psi \bmod 2\pi\colon\ ds^2 = d\psi^2 + d\varphi^2;$$

en ingebed in de vierdimensimale euclidische ruimte, E^4:

$(\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\psi, \sin\psi)$

Immers: $ds^2 = (d\cos\varphi)^2 + (d\sin\varphi)^2 + (d\cos\psi)^2 + (d\sin\psi)^2 =$
$= d\varphi^2 + d\psi^2$.

Stelling: *Onder de gesloten oriënteerbare oppervlakken is de torus de enige die een lokaal euclidische metriek kan dragen.*

In overeenstemming met de titel van deze cursus zal ik nu enige

methodische aspecten van de differentiaalmeetkunde demonstreren aan een globaal vraagstuk dat ik uitvoerig zal bespreken.

2. *De Stelling van Stokes.*

Zijn u en v coördinaten op een oppervlak V (fig. 2) en is $f(p)$ een reële functie van $p \varepsilon V$, dan kan deze uitgedrukt worden in u en v: $f(u, v)$. u en v zijn zelf voorbeelden van zulke functies. Van lokale coördinaten nemen we aan dat voor zover twee stelsels eenzelfde omgeving dekken de coördinaten van het ene stelsel, functies zijn van die van het andere stelsel, die alle partiële afgeleiden hebben. Ook beschouwen we slechts functies $f(p)$ die t.o.v. zulke coördinaten alle afgeleiden bezitten (C^∞-functies). Twee functies f en g heten differentiaal-equivalent in een punt p indien alle partiële eerste afgeleiden gelijk zijn. Alle functies equivalent met f in p vormen een klasse genaamd *differentiaal* of *covariante vector* en aangeduid met df (of dg als f en g differentiaal-equivalent in p zijn). Nu geldt de bekende regel

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv. \tag{5}$$

De differentialen in de punten $p \varepsilon V$ van een coördinatenomgeving vormen een vierparameterig stelsel met de 4 parameters u, v, P en Q in

$$P\, du + Q\, dv.$$

Geeft men C^∞-functies $P(u, v)$, $Q(u, v)$ dan bepalen deze een tweeparameterig stelsel differentialen, één bij elk punt van V. Zo een stelsel heet een *differentiaalvorm:*

$$\omega = P(u, v)du + Q(u, v)dv. \tag{6}$$

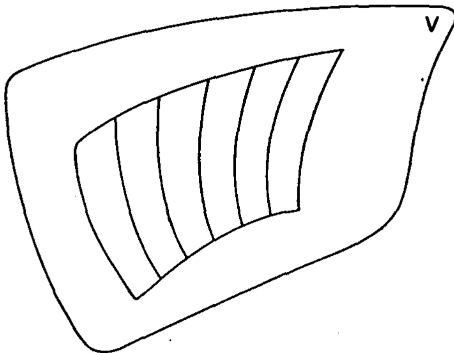


Fig. 2.

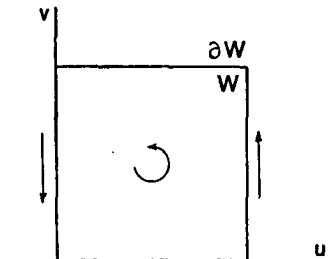


Fig. 3.

Dan en slechts dan bestaat in een coordinaten-cirkelschijf een functie f, zó dat (5) = (6) indien

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = 0.$$

We beschouwen in het coordinatenvlak het vierkant W : $0 \leqq u \leqq 1$; $0 \leqq v \leqq 1$ met rand ∂W die doorlopen zal worden als in fig. 3 aangeduid, passend bij een oriëntatie van W.

Er geldt $\int_{\partial W} P(u, v)\, du = \int_0^1 P(u, 0)\, du + \int_1^0 P(u, 1) du =$

$$= -\int_0^1 \{P(u, 1) - P(u, 0)\}\, du = -\int_0^1 \left\{\int_0^1 \frac{\partial P}{\partial v}\, dv\right\} du =$$

$$= -\int_W \frac{\partial P}{\partial v}\, d\sigma;$$

analoog $\int_{\partial W} Q(u, v)\, dv = \int_0^1 Q(1, v)\, dv + \int_1^0 Q(0, v) dv$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial u}\, du\right) dv = \int_W \frac{\partial Q}{\partial u}\, d\sigma,$$

dus

(7) $$\int_{\partial W} (P\, du + Q\, dv) = \int_W \left(-\frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial u}\right) d\sigma.$$

Aan (7) kan men een fraaie vorm geven indien men in de verzameling van sommen van formele produkten van twee differentialen rekent volgens: (f, g en h zijn functies)

(8) $df \wedge dg = - dg \wedge df,\ (h df) \wedge dg = df \wedge (h f g) = h(df \wedge dg)$

$(df + dg) \wedge dh = df \wedge dh + dg \wedge dh$ („uit-produkt" met symbool $\wedge$)

en tevens afspreekt:

(9) $d(P du + Q dv) = dP \wedge du + dQ \wedge dv$ („uit-*afgeleide*").

Dit laatste is:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial u} du + \frac{\partial P}{\partial v} dv\right) \wedge du + \left(\frac{\partial Q}{\partial u} du + \frac{\partial Q}{\partial v} dv\right) \wedge dv$$

$$= \frac{\partial P}{\partial v} dv \wedge du + \frac{\partial Q}{\partial u} du \wedge dv = \left(-\frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial u}\right) du \wedge dv.$$

Schrijft men $P\, du + Q\, dv = \omega$ dan wordt (7) met $d\sigma = du \wedge dv = - dv \wedge du$

(7′) $$\int_{\partial W} \omega = \int_W d\omega.$$

Er geldt zoals men gemakkelijk narekent:

Wanneer $u = u\,(x, y), v = v(x, y),\ Pdu + Qdv = Rdx + Sdy$
en $f du \wedge dv = g\, dx \wedge dy$

alsmede $\qquad d(Pdu + Qdv) = f\, du \wedge dv,$

dan $\qquad d(Rdx + Sdy) = g\, dx \wedge dy.$

(7′) is dus waar, onafhankelijk van de gebruikte coördinaten en is dus een bewering betreffende V en ω.

{ *Terzijde* $du \wedge dv = \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}dx \wedge dy + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}dy \wedge dx$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dx \wedge dy$$

Een bekende substitutieregel uit de integraalrekening! }

(7′) geldt voor een willekeurig stuk oppervlak van V dat door

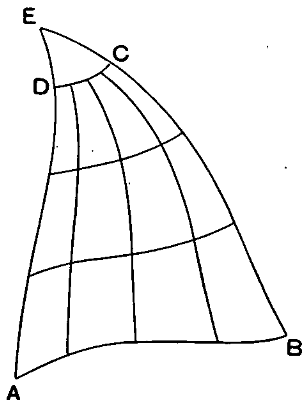


Fig. 4

„vierkant" ABCD met niveaulijnen van de coördinaten u en v.

middel van coördinaten u en v op $0 \leqq u, v \leqq 1$ kan worden afgebeeld en ook (limiet overgang zie fig. 4: CD → E) voor driehoeken. Door optellen van driehoeken (fig. 5) vindt men de

Stelling van Stokes: Voor een willekeurig georiënteerd oppervlak W met differentieerbare (behoudens eindig veel punten) rand ∂W, is

(7′) $$\boxed{\int_{\partial W} \omega = \int_W d\omega.}$$

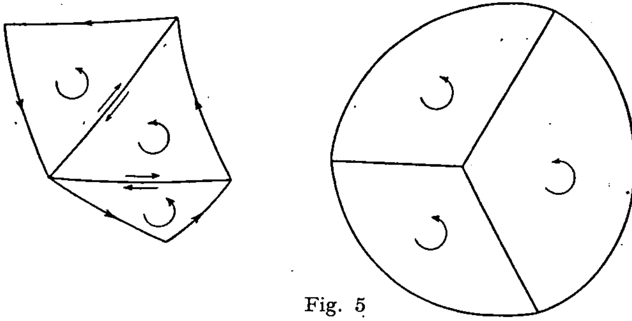


Fig. 5

3. *De krommings vorm van een oppervlak als een uitafgeleide differentiaalvorm in een vezelruimte.* (Chern [8]).

V zij nu een gesloten georiënteerd oppervlak, dus zonder rand b.v. een bol of een torus. Op V zij voorts een ds^2 gegeven. Dan kan men de gewone raakeenheidsvectoren beschouwen en ook in elk punt paren eenheidsvectoren e_1, e_2 loodrecht op elkaar, en zó dat draaiing van e_1 over 90° naar e_2 past bij de gegeven oriëntatie. De verzameling van alle dergelijke „twee-benen" is een driedimensionale ruimte B: twee parameters x en y zijn nodig om lokaal het punt op het oppervlak V aan te geven en één hoek $\varphi(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$; b.v. die, welke het eerste been maakt met de y-niveaukromme met richting gegeven door toenemende x) voor de nadere bepaling van het twee-been. De afbeelding van een twee-been op zijn oorsprong heet *projectie*: $p : B \leftarrow V$. De verzameling twee-benen met eenzelfde oorsprong heet een *vezel*. B heet een *vezelruimte* met basis V. De differentialen in B zijn alle van de gedaante (β, γ, δ constanten)

(10 $$\beta dx + \gamma dy + \delta d\varphi$$

Voor ons gemak nemen we aan dat de lokale coördinaten in V zo gekozen zijn, wat steeds kan, dat

(11) $ds^2 = \alpha^2(dx^2 + dy^2)$, $\alpha = \alpha(x, y) > 0$ en dat voorts de draaiing van de vector $dx = 1$, $dy = 0$ genaamd $\overset{\circ}{e}_1$ over de kleinste hoek naar $dx = 0$, $dy = 1$ past bij de vast gekozen oriëntatie. In het punt (x, y) van V beschouwen we nu bij een keuze van φ de twee differentialen

$$\omega_1 = \cos\varphi \,.\, \alpha\, dx + \sin\varphi \,.\, \alpha\, dy$$
$$\omega_2 = -\sin\varphi \,.\, \alpha\, dx + \cos\varphi \,.\, \alpha\, dy$$

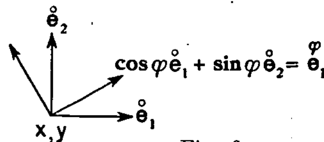


Fig. 6

Deze differentialen hebben als representanten functies die hun niveaukrommen juist loodrecht op de benen van het 2-been (x, y, φ) hebben en een gradiënt in de richting van e_1 resp. e_2 ter grootte 1. ω_1 en ω_2 zijn daardoor bepaald. [Is α_0 de waarde van α in het betreffende punt en $\varphi = \varphi_0$, dan is de differentiaal ω, in dat punt $d(\cos \varphi_0 \,.\, \alpha_0 x + \sin \varphi_0 \,.\, \alpha_0 y)$]

In het punt (x, y, φ) van B beschouwen we vervolgens de *invariant gedefinieerde* en door de metriek bepaalde differentialen

$$\omega_1 = \cos \varphi \,.\, \alpha dx + \sin \varphi \,.\, \alpha dy$$

(12)

$$\omega_2 = - \sin \varphi \,.\, \alpha dx + \cos \varphi \,.\, \alpha dy$$

Merk op: $\omega_1 \wedge \omega_2 = \alpha^2 dx \wedge dy$ dat is het oppervlakte-element $d\sigma$ van V.

Er geldt in B:

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d(\cos \varphi \,.\, \alpha) \wedge dx + d(\sin \varphi \,.\, \alpha) \wedge dy \\ &= d\varphi \wedge [- \sin \varphi \,.\, \alpha\, dx + \cos \varphi \,.\, \alpha\, dy] + \\ &\qquad \cos \varphi \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy \wedge dx + \sin \varphi \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \left[- \sin \varphi \,.\, \alpha\, dx + \cos \varphi \,.\, \alpha dy \right] \wedge \left[- d\varphi - \frac{\partial \ln \alpha}{\partial x} dy + \frac{\partial \ln \alpha}{dy} \mathrm{d}x \right] \end{aligned}$$

en analoog $d\omega_2$. Samengevat:

(13)
$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21}; \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}$$
$$- \omega_{12} = \omega_{21} = - d\varphi - \frac{\partial \ln \alpha}{\partial x} dy + \frac{\delta \ln \alpha}{\partial y} dx.$$

ω_{12} is hierdoor *eenduidig bepaald*, en dus ook *geheel bepaald door de gegeven metriek op* V. Dit ziet men als volgt:

Was er nog een oplossing van (13) ω'_{21} dan voldeed het verschil $\omega''_{21} - \omega_{21} = \beta\omega_1 + \gamma\omega_2 + \delta d\varphi$ (stel) aan

$$0 = \omega_2 \wedge (\beta\omega_1 + \gamma\omega_2 + \delta d\varphi) = \beta\omega_2 \wedge \omega_1 + \delta\omega_2 \wedge d\varphi$$
$$0 = \omega_1 \wedge (\beta\omega_1 + \gamma\omega_2 + \delta d\varphi) = \gamma\omega_1 \wedge \omega_2 + \delta\omega_1 \wedge d\varphi.$$

Bij integratie over tweedimensionale oppervlakken van deze vormen moet er dus steeds nul komen. B.v. voor oppervlakken waarop $\varphi =$ constant, waaruit volgt $\beta = \gamma = 0$, en andere oppervlakken waaruit volgt $\delta = 0$.

We berekenen vervolgens en vinden

(14) $$d\omega_{12} = h(x, y)\, dx \wedge dy =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 \ln \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln \alpha}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy = \varkappa\omega_1 \wedge \omega_2 = \Omega.$$

Hierin is $\omega_1\omega_2 = \alpha^2\,dx\,dy$ het oppervlakte-element in V en de krommingsvorm $\Omega = d\omega_{12}$ is volkomen bepaald door de metriek. Opmerkelijk is nu dat in $d\omega_{12}$ de derde parameter φ niet meer voorkomt. $d\omega_{12}$ kan dus opgevat worden als een differentiaalvorm op V, die ook weer geheel (alleen) door de metriek op V is bepaald en *kromming* heet. Ook $\varkappa$, een functie op V, is door de metriek volkomen bepaald. $\varkappa$ heet de *Gauss-kromming* van V en berekening leert, dat zij voor een oppervlak der E^3 gelijk is aan het produkt van de twee hoofdkrommingen van elk punt.

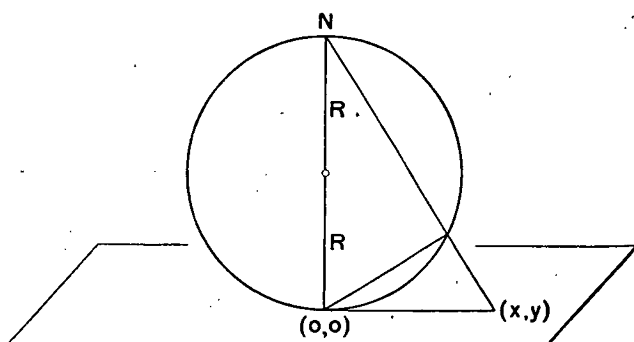


Fig. 7

Opgave (2): $\varkappa = R^{-2}$ voor de bol met straal R en de metriek (fig. 7; de coördinaten die de bol uitgezonderd N dekken, ontstaan door stereografische projectie op een vlak met gewone coördinaten x en y).

$$ds^2 = \left(\frac{4R^2}{x^2 + y^2 + 4R^2}\right)^2 (dx^2 + dy^2).$$

4. *Toepassing.*

In de vorige paragraaf hebben we een betrekking betreffende differentiaalvormen in B gevonden:

(14) $$d\omega_{12} = \Omega = -\varkappa\,\omega_1 \wedge \omega_2$$

waarbij Ω zelfs opgevat kan worden als differentiaalvorm op V nl. de krommingsvorm.

Wij beschouwen het oriënteerbare gesloten oppervlak V met metriek ds^2. Wij kiezen een veld van eenheidsvectoren op V, hoogstens uitgezonderd een eindig aantal punten (singulariteiten van het veld), doch elders met componenten die C^∞-functies der lokale coördinaten zijn. Bovendien nemen we aan dat wanneer, in lokale coördinaten het punt $(x, y) = (0, 0)$ een singulariteit heeft,

en het veld in de buurt daarvan is gegeven door $\varphi(x, y)$, dat dan $\lim_{t \to 0} \varphi\ (t\cos\psi,\ t\sin\psi) = \varphi(\psi)$ een differentieerbare functie van ψ is. De singulariteiten zijn dus niet al te lelijk. Wij vatten de eenheidsvektoren van het veld op als eerste benen van twee-benen, welke twee-benen een oppervlak MCB leveren met een rand ∂M, die geheel bevat is in de vezels boven de singulariteiten in V. Nu geldt op elk stuk van de rand in de gebruikte lokale coördinaten, $dx = dy = 0$, dus volgens (13):

$$\omega_{12} = d\varphi.$$

Toepassingen van (7′) en (14) geeft

$$\int_V - x\omega_1\omega_2 = \int_V \Omega = \int_M \Omega = \int_M d\omega_{12} = \int_{\partial M} \omega_{12} = \int_{\partial M} d\varphi$$
$$= \sum\nolimits_s \int_{\psi=0}^{-2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} d\psi = \sum\nolimits_s \mathrm{I}_s \,.\, 2\pi.$$

I_s is een geheel getal *de index van de singulariteit* die aangeduid wordt met symbool s. (Zie ook [9]).

Stelling van Gauss-Bonnet-Poincaré:

$$(15) \qquad \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_V \Omega = \sum\nolimits_2 \mathrm{I}_2 = \chi}$$

Het karakteristieke getal van *Euler- Poincaré* χ is onafhankelijk van de (geschikte) keuze van de singulariteiten van het vectorveld wegens het linkerlid van (15).

χ is echter ook onafhankelijk van de metriek.[1]) Immers:

Bewijs: Kies een vectorveld en twee metrieken ds^2 en $d\bar{s}^2$ op het oppervlak V. Dan is ook

$$(1 - \lambda)ds^2 + \lambda(d\bar{s})^2 \; 0 \leqq \lambda \leqq 1$$

een metriek op V.

Substitutie van deze metriek in (15) levert in het linkerlid een continue functie van λ dus ook in het rechterlid een continue functie van λ die echter slechts gehele waarden kan aannemen. Dan is hij constant en het gestelde volgt.

Opgave (3): Een gesloten oppervlak wordt in kromlijnige driehoeken verdeeld (getrianguleerd). Er zijn t_0 hoekpunten, t_1 zijden en t_2 driehoeken. Bereken χ met behulp van een vectorveld dat voor elke driehoek is als in figuur 8 gesuggereerd.

1) χ is zelfs een topologische invariant.

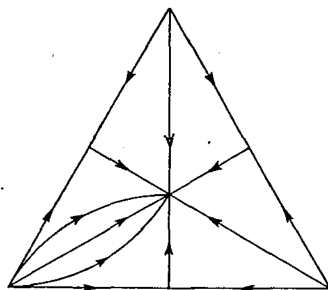


Fig. 8

In fig. 9 is de waarde van enige singulariteitensoorten vermeld. Vergelijk Hopf [9] p. 49.

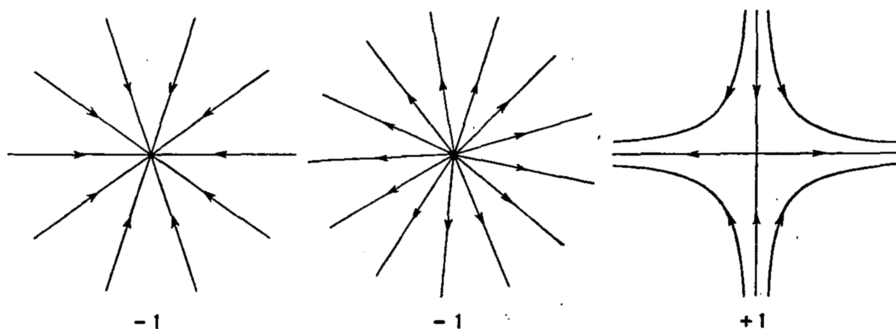


Fig. 9

antwoord: $\chi = - t_0 + t_1 - t_2$.

Opgave (4): Bereken $\chi (= -2)$ bij het vectorveld (e_1-veld) op een georiënteerde bol dat bestaat uit de eenheidsraakvectoren langs de meridianen gericht van Zuid naar Noord. Merk op dat het antwoord onafhankelijk van de oriëntatie is.

Idem voor een vectorveld op de bol dat door stereografische projectie in een veld van evenwijdige vectoren in een vlak overgaat (zie fig. 7).

Opgave (5): Bereken ook $\int \Omega$ op een bol met straal R.

Opgave (6): Bepaal een singulariteiten-vrij vectorveld op een torus ($\chi = 0$).

Opgave (7): Voor een gesloten oppervlak met Gauss-kromming $\varkappa \leqq 0$, en *niet* $\varkappa \equiv 0$, is $\chi > 0$.

Een éénparameterig (parameter = tijd) stel bewegingen van een

oppervlak met ds^2, in zich, bepaalt een snelheidsvectorveld, dat slechts geïsoleerde singulariteiten heeft (snelheid 0). Zo een singulariteit is een stationnair punt en daarom bestaat het vectorveld in de buurt van een singulariteit (op zeker moment t_0) uit raakvectoren aan concentrische cirkels. Zulke singulariteiten leveren een bijdrage $I = -1$. Daaruit volgt de

Stelling: Op een oriënteerbaar gesloten oppervlak V met Euler-Poincaré-karakteristiek χ en metriek ds^2, hoe ook gekozen, is één-parameterige beweging onmogelijk voor geval $\chi > 0$.[1]) Voor geval $\chi = 0$ (torus) is beweging soms mogelijk, maar er is geen enkel momentaan invariant punt. Voor geval $\chi = -2$ (bol) is beweging soms mogelijk maar dan heeft die beweging twee momentaan invariante punten.

Men kan hieruit ook nog afleiden:

Stelling. Op een niet oriënteerbaar oppervlak met ds^2 is beweging hoogstens mogelijk indien het een projectief vlak is, en in geval er een beweging is, heeft die één momentaan invariant punt.

Analoge stellingen gelden voor conforme afbeelding (i.p.v. beweging) van V op zich.

Genoemde Literatuur:

[1] W. Fenchel, Math. Ann. Bd 101 (1929), 238—252.
[2] I. Fary, Bull. Soc. Math. de France 77 (1949), 128—138.
[3] J. W. Milnor, Annals of Math. 52 (1950), 248—257.
[4] S. Chern, L'Enseignement Mathématique 40 (1955), 26—46.
[5] S. S. Chern-R.K. Lashof, Am. Journal of Math. LXXIX (1957), 306—318.
[6] H. Weyl, Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich 61 (1916) of Selecta, Hermann Weyl (1956), 148—179
[7] N. H. Kuiper, Proc. Amsterdam 58 (1955), 545—556, 683—689
[8] S. S. Chern, Annals of Math. 45 (1944), 747—752, en Topics in differential geometry, Mimeographed notes. Institute for Advanced Study 1951.
[9] H. Hopf, Lectures on differential geometry in the large. Mimeographed notes. Stanford University 1956.
[10] S. Bochner, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 776—797.
[11] Bochner-Yano, Curvature and Betti-numbers (1953).
[12] K. Yano, The theory of Lie-derivatives and its applications (1957), Ch. IX.

1) Veralgemeend door Bochner en Yano [10, 11, 12].

GRAFIEKEN EN ONGELIJKHEDEN

door

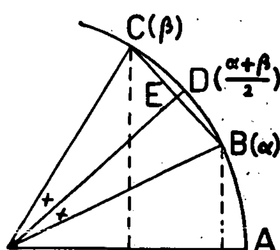
Dr. W. A. M. Burgers

Zij in figuur 1a bg AB $= \alpha$, bg AC $= \beta$, bg BD $=$ bg DC, dan is de ordinaat van E kleiner dan die van D. Hieruit lezen we onmiddellijk af:

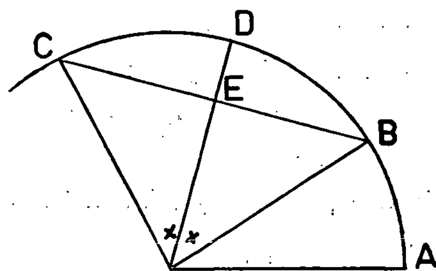
$$\sin\alpha + \sin\beta \leqq 2 \times \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

(het gelijkteken geldt als $\alpha = \beta$).

Deze ongelijkheid is ook juist als β stomp is, mits $\alpha + \beta < 180°$ (zie figuur 1b).



Figuur 1a



Figuur 1b

Voor de grafiek van de functie sin x betekent dit, dat de kromme op het traject $(0, \pi)$ zijn holle zijde naar de X-as keert.

Nemen we nu op het interval $(0, \pi)$ drie abscissen: α, β en γ, zó dat $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ en beschouwen we de driehoek die de eindpunten van de ordinaten (t.o.v. de grafiek van sin x) tot hoekpunten heeft. Deze driehoek ligt dan geheel tussen de X-as en de kromme. *Het zwaartepunt dus ook.* Waaruit onmiddellijk volgt:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \quad \text{(d.i. de ordinaat van het zwaartepunt)}$$

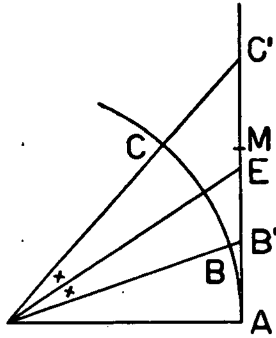
$$\leqq \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin\frac{\pi}{3}$$

of

$$\sum \sin\alpha \leqq 3 \times \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Voor *scherphoekige* driehoeken vindt men dus, m.b.v. de grafiek van de functie $\cos x$:

$$\sum \cos \alpha \leqq 3 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.$$



Figuur 2

Zij in figuur 2 MB' = MC', dan ligt E *lager* dan M. Uit de figuur leest men onmiddellijk af:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2} \geqq \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2},$$

mits α en β scherp zijn, d.w.z.: De grafiek van de functie $\operatorname{tg} x$ heeft op het traject $(0, \frac{\pi}{2})$ zijn bolle zijde gekeerd naar de X-as, evenals de grafiek van de functie $\cot x$. Maar dan geldt:

$$\sum \operatorname{tg} \alpha \geqq 3 \times \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3};$$

$$\sum \cot \alpha \geqq 3 \cot \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Op dezelfde wijze vindt men dus in elke driehoek:

$$\sum \operatorname{cosec} \alpha \geqq 3 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

en voor scherphoekige driehoeken:

$$\sum \sec \alpha \geqq 3 \sec \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.$$

OPLOSSING VAN HET VRAAGSTUK OP BLADZ. 95 EN 96 VAN JAARGANG 33 MET BEHULP VAN EEN GRAFIEK

door

G. E. KIERS

Gevraagd wordt naar de grenzen van de hoeken α, β en γ in $\triangle$ ABC, waarin geldt: $\sin\alpha \sin\beta = \frac{3}{4}$.
Uit $\sin\alpha \sin\beta = \frac{3}{4}$ volgt:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 1\tfrac{1}{2}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = 1\tfrac{1}{2} - \cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Uit $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ volgt:

$$\gamma - 180^\circ < \alpha - \beta < 180^\circ - \gamma$$

$$-\cos\gamma < \cos(\alpha - \beta) \leqq +1 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Substitutie van (1) in (2) geeft:

$$-\cos\gamma < 1\tfrac{1}{2} - \cos\gamma \leqq +1$$

$$-\cos\gamma < 1\tfrac{1}{2} - \cos\gamma \quad \text{en} \quad 1\tfrac{1}{2} - \cos\gamma \leqq +1$$

De linker ongelijkheid geeft geen beperking voor γ; uit de rechter ongelijkheid volgt:

$$\cos\gamma \geqq \tfrac{1}{2}$$

en dus

$$\gamma \leqq 60^\circ.$$

Uit $\sin\alpha \sin\beta = \frac{3}{4}$ volgt in eerste instantie — omdat beide factoren kleiner zijn dan of gelijk zijn aan $+1$ en positief —, dat:

$$\sin\alpha \geqq \tfrac{3}{4} \quad \text{en} \quad \sin\beta \geqq \tfrac{3}{4}$$

$$48^\circ\,35' \leqq \alpha \leqq 131^\circ\,25' \quad \text{en} \quad 48^\circ\,35' \leqq \beta \leqq 131^\circ\,25'$$

We gaan nu over tot de grafiek en nemen daartoe een horizontale φ-as en een verticale as, waarop de waarden van α, β en γ worden afgelezen. In de figuur is deze laatste as opgericht bij $\varphi = 40^\circ$. De hoeken α, β en γ zijn functies van φ en wel:

$$\alpha = \varphi, \ \sin\beta = \frac{3}{4\sin\varphi} \quad \text{en} \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

De grafiek van α is dus een rechte (zie I), die de φ-as in het punt $\varphi = 0$ onder een hoek van 45° snijdt.

We geven aan $\sin\alpha$ en $\sin\beta$ verschillende positieve waarden, waarvan de produkten steeds $= \frac{3}{4}$ zijn en kunnen daaruit nu onderstaande tabel samen stellen.

$\sin\alpha$	$\sin\beta$	α	β	γ	Zie de punten in de grafiek gelegen resp. op de krommen II en III
$\frac{3}{4}$	1	48°35′	90°	41°25′	C; 1 en D; 2
		131°25′	90°	—41°25′	
0.7771	0.9659	51°	75°	54°	3 en 4
			105°	24°	5 en 6
		129°	75°	—24°	
			105°	—54°	
$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	60°	60°	60°	P; 7
			120°	0°	A; 8 en E; 9
		120°	60°	0°	B; 10 en 11
			120°	—60°	
0.9659	0.7771	75°	51°	54°	12 en 13
			129°	—24°	
		105°	51°	24°	14 en 15
			129°	—54°	
1	$\frac{3}{4}$	90°	48°35′	41°25′	16 en 17
			131°25′	—41°25′	

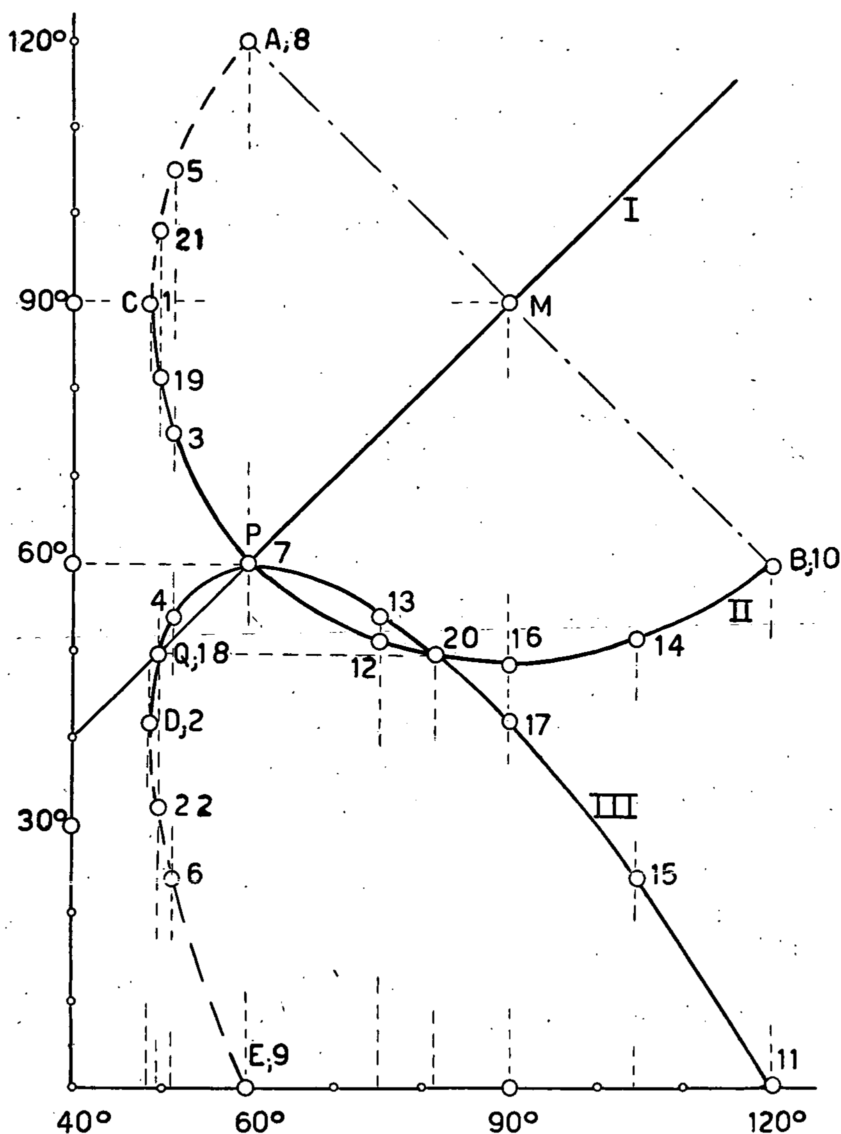
Aan de betrekking $\sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{4}$ wordt (zie de tabel) o.a. voldaan door $\alpha = 120°$ en $\beta = 60°$. In dit geval is $\gamma = 0°$. Nemen we als waarden voor α en β resp. $120° + p$ en $60° - q$ ($p>0, q>0$ en $p<q$), dan nemen $\sin\alpha$ en $\sin\beta$ af en wordt hun produkt kleiner dan $\frac{3}{4}$. Deze mogelijkheid moet dus uitgesloten worden. Hetzelfde geldt voor $\beta = 120° + p$ en $\alpha = 60° - q$, waaruit volgt dat α en β voldoen aan de voorwaarden:

$$48°35' \leqq \alpha < 120° \quad \text{en} \quad 48°35' \leqq \beta < 120°.$$

We kunnen ons ook de vraag stellen, wanneer $\alpha = \gamma$ en dus $\beta = 180° - 2\alpha$. De betrekking $\sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{4}$ gaat dan over in:

$$\sin\alpha\sin 2\alpha = \tfrac{3}{4}$$
$$8\sin^2\alpha\cos\alpha = 3$$

$$8\cos^3\alpha - 8\cos\alpha + 3 = 0$$
$$(2\cos\alpha - 1)(4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 3) = 0$$



$\cos\alpha = \frac{1}{2}$ of $4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 3 = 0$

$\alpha = 60°$ $\cos\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{4} = 0.6514$

$\alpha = \beta = \gamma = 60°$ (punt P; 7) (het minteken voldoet niet)

$\alpha = \gamma = 49°21'$ (punt Q; 18)

$\beta = 81°18'$ (punt 19)

Hadden we als voorwaarde gesteld $\beta = \gamma$, dan zou daaruit volgen:
$\alpha = \beta = \gamma = 60°$ (punt P;7) of
$\beta = \gamma = 49°21'$ (punt 20) en $\alpha = 81°18'$

De punten 20 en Q;18 liggen dientengevolge op een rechte evenwijdig met de φ-as.

We kunnen nu gemakkelijk de grafiek voor β (zie II) en die voor γ (zie III) voltooien. De grafiek II strekt zich uit aan de linkerkant van de rechte AB. De rechterkant (niet getekend) geeft negatieve waarden voor γ en geeft het gedeelte van III, dat onder de φ-as is gelegen.

Wat betreft de kromme II kunnen we nog het volgende opmerken:

1° bij iedere waarde van $\alpha = 90° \pm p$ behoren twee waarden $\beta = 90° - q$ en $\beta = 90° + q$.

2° bij $\alpha = 90° - p$ en $\alpha = 90° + p$ behoort o.a. $\beta = 90° + q$ en bij $\beta = 90° - q$ en $\beta = 90° + q$ behoort o.a. $\alpha = 90° + p$. Hieruit volgt, dat de rechten door M ($\varphi = 90°$), evenwijdig met de assen, symmetrie-assen zijn en M het middelpunt van de kromme II is.

3° behoort bij $\alpha = p$ een waarde $\beta = q$, dan behoort bij $\alpha = q$ o.a. een waarde $\beta = p$ en bij $\alpha = 180° - q$ o.a. een waarde $\beta = 180° - p$. Hieruit volgt, dat de rechten AB en PM eveneens assen van symmetrie zijn.

Tenslotte merken we op, dat de *getrokken* boogdelen PC en PD met elkaar corresponderen, evenals de *gestreepte* boogdelen CA en DE.

Aan de hand van de grafiek kunnen we nu de volgende conclusies opstellen:

1° het gedeelte van II rechts van AB geeft negatieve waarden van γ en blijft dus buiten beschouwing. De waarden van α en β zijn dientengegevolge kleiner dan 120°.

2° bij iedere waarde van α, gelegen tussen 60° en 120° behoort één waarde voor β en één waarde voor γ. Deze voldoen aan de voorwaarden.

$$48°35' \leqq \beta < 60°$$

en

$$0° < \gamma < 60°$$

3° bij $\alpha = 60°$ behoort één stel waarden voor β en γ, n.l. $\beta = \gamma = 60°$.

4° bij $\alpha = 49°21'$ behoren twee oplossingen voor β en γ, n.l. $\beta = 81°18'$ (punt 19) en $\gamma = 49°21'$ (punt Q; 18), maar dus ook $\beta = 180° - 81°18' = 98°42'$, (punt 21) en $\gamma = 31°57'$ (punt 22).

5° Is $49°21' < \alpha < 60°$, dan is $\gamma < \alpha$ of $\gamma > \alpha$. De grenzen van β en γ zijn nu
a. $\gamma < \alpha$, dus $98°42' < \beta < 120°$ en $0° < \gamma < 31°57'$
b. $\gamma > \alpha$, dus $60° < \beta < 81°18'$ en $49°21' < \gamma < 60°$.

6° bij $48°35' \leqq \alpha < 49°21'$ behoort de boog 18 — 22 van III met uitzondering van de punten 18 en 22 en de boog van II tussen de punten 19 en 21. Bij iedere α in bovengenoemd interval krijgen we dus evenals bij 5° twee driehoeken. De grenzen van β en γ zijn nu:
$81°18' < \beta \leqq 90°$ en $41°25' \leqq \gamma < 49°21'$
of
$90° \leqq \beta < 98°42'$ en $31°57' < \gamma \leqq 41°25'$

7° is $\alpha = 49°21'$, dan zijn ook hier twee driehoeken mogelijk en wel
a. $\gamma = 49°21'$ en $\beta = 81°18'$
of
b. $\gamma = 31°57'$ en $\beta = 98°42'$

8° Wordt als voorwaarde gesteld $\alpha \geqq \gamma$, dan voldoen de hoeken aan de voorwaarden:

$$48°35' \leqq \alpha < 120°$$
$$48°35' \leqq \beta < 120°$$
$$0° < \gamma \leqq 60°$$

9° Wordt als voorwaarde gesteld $\alpha \geqq \beta$, dan voldoen de hoeken aan de voorwaarden:

$$60° \leqq \alpha < 120°$$
$$48°35' \leqq \beta \leqq 60°$$
$$0° < \gamma \leqq 60°$$

BOEKBESPREKING

Dr. W. A. M. Burgers, *Planimetrische vraagstukken*, voor de hoogste klassen van het V.H.M.O., 32 blz., ing. *f* 1,10; J. B. Wolters, Groningen, 1958.

Een eenvoudig boekje met 150 opgaven, die 16 van de 32 bladzijden in beslag nemen. De blanco bladzijden geven ruimte voor korte aantekeningen. Leerlingen die deze verzameling doorwerken, zullen stellig op het eindexamen Gymnasium goed beslagen ten ijs kunnen komen. Voor de hogereburgerschool komt het boekje m.i. minder in aanmerking. Ik veronderstel dat de leraar hier de weinige uren die voor een herhaling van de planimetrie vrijgemaakt kunnen worden, liever zal gebruiken voor een herhaling van de theorie èn voor opgaven die nauwer bij het stereometrieonderwijs aansluiten dan de opgaven van deze verzameling.

Wansink

HET GEBRUIK VAN DE Y-AS EN DE y BIJ DE BEHANDELING VAN FUNCTIES EN HUN GRAFIEKEN

door

Dr. M. G. VAN TOL

Het dreigt in de mode te komen om bij de behandeling van de functies en hun grafieken min of meer krampachtig de y en de Y-as te weren. Ik lees in „Euclides" beweringen als: „Bij de grafieken moeten we geen Y-as invoeren", „door het invoeren van de Y-as wordt het functiebegrip vertroebeld". Ook de neiging om de analytische meetkunde overdreven angstvallig te vermijden in de algebra hangt hiermede samen.

Dikwijls heb ik hierover nagedacht en met collegae van gedachten gewisseld. Het is nu zozeer mijn overtuiging geworden, dat we hiermee op de verkeerde weg zijn, dat ik mijn bezwaren in „Euclides" wil kenbaar maken.

Het lijkt me juist om in de didactiek als volgt te werk te gaan. Eerst stelt men zich de verschillende begrippen duidelijk voor ogen. Vervolgens gaat men na welke hiervan in de klas behandeld moeten worden. Tenslotte bestudeert men de wijze, waarop dit het beste kan geschieden. Daarom begin ik nu met het begrip functie te definiëren:

I. Wanneer een voorschrift gegeven is, waardoor aan elk getal x van een getallenverzameling een getal y is toegevoegd, dan noemt men y een functie van x.

Een voorschrift kan b.v. gegeven worden door de volgende betrekkingen:

1. $y = x^2 - x + 1$.

2. $\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ als } x \neq 1 \\ y = 2 \text{ (of b.v. een ander getal) als } x = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = 1 \text{ als } x \text{ meetbaar is} \\ y = 0 \text{ als } x \text{ onmeetbaar is} \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = 1 \text{ als } x \leqq 0 \\ y = 2 \text{ als } x > 0 \end{cases}$

5. $y = \sin x$.

In deze 5 voorbeelden kan x behoren tot de verzameling der reële getallen.

6. $y = {}^{10}\log x$, waarin x tot de verzameling der positieve getallen behoort.

7. $y = (-2)^x$, waarin x tot de verzameling der gehele getallen behoort.

Men duidt een functie van x ook wel aan met andere symbolen als y, b.v.

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

of

$$f(x) = \sin x.$$

In bepaalde gevallen is het nl. gewenst om verschillende symbolen te gebruiken, b.v. wanneer men twee functies van x naast elkaar beschouwt: $f(x) = x + 3$ en $g(x) = 2x - 7$. Hier is dus de y niet *weggelaten* maar eenvoudig *vervangen* door een ander symbool. De x tussen haakjes wil nog eens duidelijk aangeven, dat f en g functies van x zijn. Men schrijft ook wel eens $y(x)$.

Nu komt iets dat verwarring kan stichten.

Men gebruikt het symbool $f(x)$ ook nog in een ander geval: Wanneer men de wijze, waarop y als functie van x gegeven is in het midden wil laten, schrijft men

$$y = f(x).$$

Men schrijft dit ook wel eens wanneer men een of andere uitdrukking voor een functie door het symbool $f(x)$ wil afkorten.

Maar geeft men de functie

$$f(x) = x + 3$$

dan duidt $f(x)$ de *waarde* van $x + 3$ aan en deze *waarde* is een functie van x. Hier is y dus vervangen door f.

II. Is gegeven $f(xy) = 0$, dan stelt f hierin een functie van x en y voor en men vraagt dan naar de waardenparen x en y, die aan deze vergelijking voldoen. Gebruikt men nu een rechthoekig of scheefhoekig coördinatenstelsel, dan kan men naar de meetkundige plaats vragen van de punten, waarvan de coördinaten aan deze vergelijking voldoen. Deze meetkundige plaats kan een kromme zijn. Is nu (x_0, y_0) zo'n waardenpaar, dan kan men onder bepaalde voorwaarden een gebied om het punt (x_0, y_0) aangeven, waarbinnen y een functie van x is.

Van I kunnen we een groot deel in de klas behandelen. Bij II beperken we ons tot uiterst eenvoudige vergelijkingen in x en y, terwijl we de begrippen impliciete functie en inverse functie noemen, maar er niet ver op ingaan. We komen hierbij ook even op het gebied van de analytische meetkunde. Weglaten kunnen we II niet, omdat we een en ander nodig hebben in de natuurkunde en andere vakken.

Nu de vraag: *Hoe* kan de behandeling het beste geschieden? In

„Euclides", 25ste jaargang, heeft Dr. J. Koksma een zeer waardevol artikel over functies en hun grafieken geschreven. Hij tekent voor de leerlingen de grafiek van een functie als volgt (blz. 66): „Men beeldt de x af op een horizontale as en denkt in elk punt een loodlijnstuk opgericht, dat de functiewaarde aangeeft. Begin met een positieve functiewaarde, kleinere waarde, korter stukje, functiewaarde 0, loodlijnstukje 0, functiewaarde negatief nog meer zakken, loodlijnstukje naar beneden. De eindpunten vormen de grafiek," enz.

Hierbij is de Y-as inderdaad niet nodig en het gebruik van coördinaten zou *hier* uit den boze zijn. Of het, zoals Dr. Koksma beweert, hier overbodig is om de functie y te noemen, durf ik niet te onderschrijven, en of dit schadelijk is hangt m.i. geheel af van de wijze van behandeling. Maar goed, er zijn meer wegen, die naar Rome leiden.

Nu komt echter mijn groot bezwaar.

Er is — ik meen naar aanleiding van bovengenoemd artikel — bij sommige docenten een voorliefde ontstaan om de Y-as en de y weg te laten *tot het eindexamen toe*. Men kan b.v. lezen in het verslag van '55 van de staatsexamencommissie: „Het voorstellen van een functie door een letter y acht de subcommissie overbodig en soms verwarrend." In het verslag van '53 stond zelfs: „De subcommissie stelt prijs op het weglaten van de Y-as; als de candidaten zich er per sé van willen bedienen, dan wordt het gebruik wel eens oogluikend toegestaan"!! Men wekt voor de candidaten de schijn, alsof men dan *fouten* maakt! Waarom mag men *nooit meer* een functie y noemen, waarom mag men *nooit meer* met behulp van een Y-as de richting en de grootte van de lijnstukjes aangeven? En waarom moet in de algebra steeds zorgvuldig vermeden worden om de analytische meetkunde aan te raken? Dit alles leidt tot alle mogelijke kunstmatigheid, die echt niet duidelijk is.

Hierboven schreef ik reeds: In $f(x) = x^2 - x + 1$ of $f(x) = \sin x$ is y niet weggelaten maar *vervangen* door het symbool $f(x)$. Wanneer de y-tegenstanders dus consequent willen zijn zouden ze ook het symbool $f(x)$ moeten weglaten en uitsluitend moeten spreken van „de functie $x + 3$" en „de functie x". In hun leerboeken doen ze dit dan ook meestal, maar ik heb nog geen leerboek gezien, waaruit ook consequent het symbool $f(x)$ verdwenen is. Langs een omweg wordt de y er weer ingehaald en heet dan $f(x)$ of $g(x)$. Dit kan ook niet anders. Waartoe men echter komt blijkt o.a. uit de volgende voorbeelden.

In een opgave wil men vragen om de grafiek te tekenen van $y = x$. Deze opgave luidt nu: „Teken de grafiek van x". Hier staat echter

slechts één veranderlijke. Nergens staat, dát men naast de onafhankelijk veranderlijke x nog een *andere* afhankelijk veranderlijke wil beschouwen, die hier toevallig steeds gelijk is aan x.

Heeft men een functie, die voor elke waarde van het argument de waarde 3 heeft, dan wordt de zaak nog onduidelijker. Men spreekt dan van de functie 3. Maar 3 is een *getal* en geen *functie*. De gewone wiskundige schrijfwijze is $f(x) = 3$. Hier staan *twee* veranderlijken, nl. het argument x en de functie f. De functiewaarde is voor elke x gelijk aan 3.

Welke verwarring is ontstaan blijkt o.a. uit de volgende definitie in een leerboek: „Eén functie van x is een algebraïsche vorm, waarin de letter x voorkomt". Ik wil hier de foutieve uitdrukking „*algebraïsche* vorm" voorbijgaan en slechts opmerken: de drieterm $x^2 - 5x + 6$ is *geen* functie van x. De *waarde* van $x^2 - 5x + 6$ is *wel* een functie van x. Noemt men die waarde y of $f(x)$ dan wordt het functioneel verband aangegeven door de relatie: $y = x^2 - 5x + 6$ of $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Spreekt men alleen van „de functie $x^2 - 5x + 6$" zonder meer, dan geeft men het *halve* voorschrift (nl. $y = x^2 - 5x + 6$) en *niet* de functie. Ik kan me voorstellen dat een docent dit wel eens in de klas doet, maar dat is iets anders dan het *bewust* en *uitdrukkelijk* te *schrijven* en het dan te doen voorkomen alsof dit alleen wiskundig juist is (zie de staatsexamenverslagen).

Een docent, die de functies eerst behandelde zonder Y-as en zonder y, maar in de vierde klas de kwadratische functies daarna eens behandelde met y, schreef mij dat de leerlingen toen klaagden dat die y zo moeilijk was. Ik kan me dit indenken, maar ben er dan tevens zeker van, dat bij de behandeling b.v. van de formule $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ in de bewegingsleer er ook moeilijkheden zullen komen als we s een functie van t willen noemen. Gebruikt de leerling datgene, wat hij in de wiskundeles leerde, dan kan hij slechts zeggen: „De weg is de functie $v_0t + \frac{1}{2}at^2$ van de tijd t", waardoor de zaak veel moeilijker wordt om te overzien.

En hoe moet het nu met de behandeling van de inverse functie? En wat wil men met de impliciete functie? Men heeft mij op deze vraag geantwoord: „Dit alles speelt in ons onderwijs gelukkig een ondergeschikte rol". Maar bij de behandeling van de wet van Boyle leren we dat de spanning een functie is van het volume. Mag deze functie impliciet gegeven worden door de formule PV = c, of moeten we zeer gekunsteld uitsluitend zeggen: De spanning is de functie c/V van het volume en het volume is de functie c/P van de spanning? Beide functies in één grafiek tekenen gaat niet, want we mogen maar één as gebruiken.

In de electrotechniek gebruikt men de formule

$$R_t = R_{15}\{1 + k(t - 15)\}$$

en men ziet hier de weerstand R als een functie van de temperatuur. Omgekeerd, b.v. bij de bolometer, ziet men de temperatuur als een functie van de weerstand. Dit alles kan nu niet meer zonder moeite gevolgd worden door leerlingen, die van h.b.s. of gymnasium komen.

Tot welke kronkelingen de vrees voor het gebruik van de y en voor een eventuele toepassing van de analytische meetkunde in de algebra leidt, leert ook de volgende behandeling van een stelsel lineaire vergelijkingen in een leerboek.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

„Lost men y uit beide vergelijkingen op, dan vindt men voor y opvolgend de functies $x - 1$ en $2 - \frac{1}{2}x$."

En dan komt de volgende bewering, waarvan de lezing de leerlingen toch minstens hoofdpijn moet bezorgen:

„De coördinaten van het snijpunt van de grafieken van de functies, die men vindt door y opvolgend uit de gegeven vergelijkingen op te lossen, zijn de wortels van het gegeven stelsel".

Iets verder moet de schrijver eindelijk zwichten:

„Men zegt, dat door de formules als $x - y = 1$ en $x + 2y = 4$ y impliciet als functie voor x gegeven is".

Hij moet de y gebruiken. De leerlingen zijn dit echter niet gewend en bij een moeilijk onderwerp als de impliciete functies wordt hun dit nu plotseling zo voorgezet. De schrijver vervolgt dan: „De uitdrukkingen $x - 1$ en $2 - \frac{1}{2}x$, die men krijgt door y uit deze beide vergelijkingen op te lossen, zijn expliciete functies van x".

Uit deze laatste zin blijkt duidelijk hoe ongemotiveerd en angstvallig de schrijver de y weer wil ontgaan en dit gebeurt hier ten koste van eenvoud, duidelijkheid en juistheid. Een *uitdrukking* is immers geen functie.

Alle leerlingen, die in hun verdere studie nog wiskunde nodig hebben, en dat zijn waarlijk niet alleen degenen, die uitsluitend wis- en natuurkunde gaan studeren, krijgen *wel* met de y en de Y-as te maken. Aan deze worden nu in de toekomst extra moeilijkheden bezorgd en dat alles om z.g. didactische redenen!

Werkelijk, men schiet hier zijn doel totaal voorbij.

HET FUNCTIEBEGRIP EN DE Y-AS

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Het artikel van Dr. M. G. van Tol over „Het gebruik van de Y-as en de y bij de behandeling van functies en grafieken" is voor mij aanleiding nader op deze kwestie in te gaan. Ik wil daarbij trachten zo objectief mogelijk te zijn. Ik geef a priori toe, dat dit voor mij moeilijk zal zijn, aangezien ik door het bekende artikel van Dr. J. Koksma over „Functies en grafieken" in Euclides (jaargang 25, pag. 55 e.v.) bekeerd ben tot het weglaten van de Y-as bij het onderwijs in de algebra.

Ik zou achtereenvolgens willen bespreken: het begrip functie, het voorstellen van een functie door y of $f(x)$ en het gebruik van de Y-as.

1. *Het begrip functie.* In de volgende vier uitspraken komt de term „functie" voor op een wijze, die, naar ik meen, door ieder wel als mathematisch juist aanvaard wordt:

a. $x^2 + 3x + 5$ is een functie van x,
b. als $xy + x + y - 1 = 0$, dan is y een functie van x,
c. als $y = x^2 + 3x + 5$, dan is y een functie van x,
d. voor de oppervlakte O van een gelijkzijdige driehoek met zijden a geldt $O = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$; O is dus een functie van a.

De overeenkomst tussen deze vier uitspraken is daarin gelegen, dat in geval a bij elke waarde van x één waarde van $x^2 + 3x + 5$ behoort, in geval b en c bij elke waarde van x één waarde van y (in geval b uiteraard hoogstens één waarde, maar dat is hier van geen belang), in geval d bij elke waarde van a één waarde van O. Toch springt direct een verschil in het oog: in geval a komt in de uitspraak slechts één variabele voor, nl. x, terwijl in de overige uitspraken twee variabelen, nl. x en y resp. a en O, voorkomen. In de gevallen b, c en d is dus sprake van een relatie tussen twee variabelen, in geval a niet. Oppervlakkig beschouwd lijkt dit verschil niet groot; men zou immers kunnen zeggen, dat in geval a ook sprake is van een relatie, nl. een relatie tussen x en $x^2 + 3x + 5$. Toch lijkt mij dit niet juist. In geval a is sprake van een operatie (rekenvoorschrift), die, op een bepaalde waarde van x uitgevoerd een bepaalde uitkomst doet verkrijgen. Een operatie is iets anders dan een relatie,

al kan men natuurlijk zeggen, dat er een relatie bestaat tussen de gekozen waarde van x en het daaruit verkregen resultaat. Daarmee is echter de operatie niet tot een relatie geworden. Men kan wel zeggen, dat men uit de operatie een relatie kan afleiden. Evenzo kan men b.v. uit de onder b genoemde relatie een operatie afleiden, nl. de operatie $(1 - x)/(1 + x)$.

Het onderscheid tussen het geval a en de overige gevallen willen we op de een of andere wijze terminologisch vastleggen. We zullen de term functie reserveren voor geval a. Per definitie noemen we een vorm, waarin één variabele, x, voorkomt, een *functie van x*, als deze vorm in een getal overgaat, als voor x overal een bepaald getal gesubstitueerd wordt. (Ik laat hier buiten beschouwing, dat een functie niet voor elke waarde van x gedefinieerd behoeft te zijn en dat er in een functie parameters kunnen voorkomen. Ook laat ik functies van meer dan één variabele buiten beschouwing. Door deze vereenvoudigde definitie van een functie komt het essentiële beter tot zijn recht.) Aan deze definitie zou nog een nadere definitie van de term „vorm" moeten voorafgaan. Deze netelige kwestie laat ik liever rusten, daar hij hier van weinig belang is.

Onder een *relatie tussen x en y* verstaan we een uitspraak, waarin twee variabelen, x en y, voorkomen, die de eigenschap heeft waar of fout te zijn, als men voor de variabelen getallen substitueert. Ook hier laat ik ter wille van eenvoud en duidelijkheid details onbesproken. Is een relatie tussen x en y, $R(x, y)$ gegeven, dan is het mogelijk, dat bij gegeven x voor verschillende waarden van y $R(x, y)$ waar is. Als het geval zich voordoet, dat bij gegeven x de uitspraak $R(x, y)$ steeds maar voor (hoogstens) één waarde van y juist is, dan noemen we $R(x, y)$ een *functionaal verband tussen x en y*. In geval b en geval c hebben we dus te maken met een functionaal verband tussen x en y.

Wat is nu de betrekking tussen een functionaal verband en een functie? Als er tussen x en y een functionaal verband bestaat, dan is er een functie (die we gemakshalve $f(x)$ zullen noemen) met de eigenschap, dat voor iedere waarde van x geldt $y = f(x)$. In voorbeeld b is deze functie $(1 - x)/(1 + x)$, want voor elke x zijn de beweringen

$$xy + x + y - 1 = 0 \text{ en } y = \frac{1 - x}{1 + x}$$

gelijkwaardig.

Uit de aard der zaak is de terminologie hier niet essentieel, maar gaat het om het begripmatige onderscheid. Wil men liever een

functionaal verband een functie noemen en een functie b.v. een functieoperator of functievoorschrift, dan doet dit aan de rest van het betoog niets af. Dit alleen ter geruststelling van hen, die nu reeds menen, dat ik een bepaalde terminologie gekozen heb om meer kans te hebben de Y-as te kunnen uitbannen.

Nu is het evident, dat zowel functies als functionale verbanden in de wiskunde een rol spelen, en ook, dat functies in zoverre eenvoudiger zijn, dat we slechts met één variabele te maken hebben. Er is dus alle reden om bij een eerste kennismaking het begrip functie op de voorgrond te stellen. Maar even evident is, dat in de toepassingen van de algebra op de meetkunde, mechanica, natuurkunde en scheikunde het functionale verband van veel groter belang is dan de functie, zoals we al in voorbeeld d zagen. Er is dus anderzijds alle reden in het algebra-onderwijs een behandeling van het functionale verband in te lassen. En hier ligt m.i. de grondoorzaak van het verschil in inzicht tussen de consequente uitbanners van de Y-as en van degenen, die de Y-as zoveel mogelijk willen handhaven. De eersten leggen de nadruk op het begrip functie in bovengenoemde zin, de laatsten op het functionale verband. Ik geloof, dat men verstandig doet hier op te merken, dat de waarheid, zoals gebruikelijk, in het midden ligt.

2. *Het voorstellen van een functie door y of $f(x)$.* In geval a, het geval dus, waarin we uitgingen van de uitspraak „$x^2 + 3x + 5$”, zullen we vaak behoefte hebben aan een kortere schrijfwijze voor deze functie. We noemen de functie dan $f(x)$. Essentieel is daarbij, dat we verschillende functies ook verschillende namen geven. Komt in een betoog dus meer dan één functie voor, dan zullen we deze functies $f(x)$, $g(x)$, enz. noemen.

In de gevallen b en c, waarin een relatie tussen x en y optrad, kunnen we een soortgelijke verkorte schrijfwijze ook invoeren. We kunnen namelijk desgewenst schrijven $y = f(x)$, maar hebben door het optreden van de variabele y aan deze verkorte schrijfwijze veelal geen behoefte.

Nu doet zich in de schoolwiskunde een merkwaardige vermenging voor van de beide standpunten. Degenen, die gewoon zijn met functionale verbanden te werken, hebben de behoefte elke functie tot een functionaal verband te transformeren en stellen de functie dan gelijk aan y. Misschien zeggen zij ook wel, dat y een naam is voor de functie (ik heb dat zelf tenminste vroeger wel gedaan). Komt in een betoog meer dan één functie voor, dan stellen zij al deze verschillende functies gelijk aan y. En of men daarbij nu denkt aan

relaties tussen x en y of aan een simpele naamgeving, dit lijkt mij niet te verdedigen. Aan twee eenvoudige voorbeelden zal ik trachten dit toe te lichten.

Onderstel, dat men grafisch de ongelijkheid

$$3x + 1 > 2x - 5$$

wil oplossen. Men kan dan vragen in de terminologie zonder y: teken in één figuur de grafieken van de functies

$$f(x) = 3x + 1,$$
$$g(x) = 2x - 5$$

en los met behulp van deze grafieken de ongelijkheid

$$f(x) > g(x)$$

op. Maar men kan niet vragen de grafieken te tekenen van de functies

$$y = 3x + 1,$$
$$y = 2x - 1$$

en daarna de ongelijkheid

$$y > y$$

op te lossen.

Ook kan men wel vragen in één figuur te tekenen de grafieken van b.v. $f(x) = x$, $g(x) = 1/x$ en $h(x) = f(x) + g(x)$. Maar de overeenkomstige vraag in de formulering met y mislukt weer.

Men zal mij tegenwerpen, dat men een dergelijke idiote formulering dan ook niet probeert te geven. Maar het feit, dat deze formulering mislukt, blijft toch suspect.

De oorzaak van de moeilijkheid is gemakkelijk aan te wijzen. In $y = 3x + 1$ en $y = 2x - 5$ is er sprake van twee relaties. In deze relaties komen drie verschillende variabelen voor, nl. x, de eerste y en de tweede y. Verschillende variabelen dient men door verschillende letters voor te stellen. Doet men dit niet, dan kan dat tot misverstand leiden. Men dient dus te spreken van de functies $y = 3x + 1$ en $z = 2x - 5$. Men deinst hiervoor waarschijnlijk terug, omdat men dan moet spreken van de Y-as, die tevens Z-as is.

3. *Het gebruik van de Y-as.* Hier komen we ongetwijfeld op subjectiever terrein. Zowel bij het maken van een grafiek van $f(x)$ is het mogelijk een functiewaarde-as te tekenen als het bij het tekenen van een grafiek van $y = f(x)$ mogelijk is een Y-as te tekenen. En ook is het in beide gevallen mogelijk deze as weg te laten. Toch geloof ik, dat men het er over het algemeen mee eens zal zijn, dat in het eerste geval het tekenen van een functiewaarde-as weinig zinvol is, terwijl het in het tweede geval aanbeveling *kan* verdienen.

Graag wil ik de didactische consequenties nader onder de loep nemen. Omdat ik vermoed, dat degenen, die bij eerste kennismaking met het functiebegrip de variabele y niet gebruiken, ook wel de Y-as zullen weglaten, wil ik trachten me op het standpunt te stellen van hen, die het functionale verband het belangrijkst achten en daarom direct elke functie „gelijk aan y stellen". Bij elke waarde van x behoort dan één waarde van y en de grafiek dient om dit verband te verduidelijken. We nemen aan, dat daarbij van de Y-as gebruik gemaakt wordt. Wat doet een leerling nu, als bij b.v. uitgerekend heeft, dat bij $x = 3$ de functiewaarde $y = 2$ behoort. De ervaring leert, dat hij dan meestal eerst het punt $x = 3$ op de X-as aanwijst, daarna op de Y-as vanuit de oorsprong een stuk gelijk aan 2 afzet, vervolgens in het zo verkregen punt een loodlijn op de Y-as opricht en deze loodlijn snijdt met de loodlijn in het punt $x = 3$ op de X-as. In fig. 1 is deze gang van zaken toegelicht. Daarnaast vindt men in fig. 2, wat de leerling, die geen Y-as tekent, zal doen. Ook hij tekent het punt $x = 3$ op de X-as, maar tekent nu door dit punt een loodlijn op de X-as en zet daar direct een lijnstuk gelijk aan 2 op af.

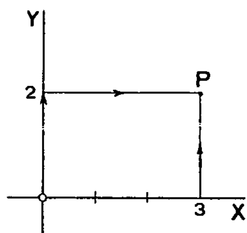


Fig. 1.

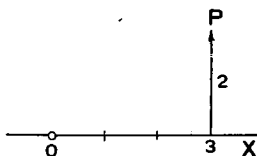


Fig. 2.

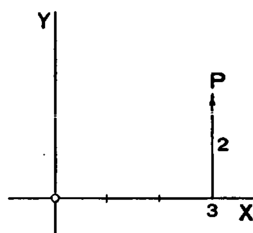


Fig. 3.

Vergelijkt men fig. 1 en fig. 2, dan ziet men, dat de tweede duidelijker het verband tussen waarde van het argument en functiewaarde weerspiegelt. Men ziet daar het duidelijkst, dat aan $x = 3$ de functiewaarde 2 is toegevoegd. Ik kan het verschil niet beter typeren dan door middel van een opmerking van Dr. W. Burgers: als je naar je vriend gaat, die op nr. 9 tweehoog woont, bel je dan op nr. 1 aan om daarna naar de tweede etage te gaan, vervolgens door alle muren heen te breken en ten slotte op nr. 9 bij je vriend te komen, of zou je niet liever direct op nr. 9 aanbellen?

Ten slotte kan men kool en geit sparen door de Y-as te tekenen en toch de tweede methode toe te passen (fig. 3). Maar zoals elk com-

promis, is ook deze oplossing halfslachtig en dus niet aan te bevelen. Een extra rechte in de grafiek, waar men, althans voorshands, niets mee doet, werkt niet bevorderend voor het verkrijgen van een goed inzicht.

We komen dus tot de conclusie, dat men, zelfs als men uitgaat van het functionale verband $y = f(x)$, beter doet de Y-as *aanvankelijk* weg te laten.

Ik zou echter nog iets verder willen gaan. Het lijkt mij beter niet uit te gaan van het functionale verband, maar aanvankelijk de functie te bespreken. M.i. wordt daardoor de beginsituatie vereenvoudigd en voorkomt men, dat de functies überhaupt niet behandeld worden. (Het komt voor, dat kandidaten op het staatsexamen niet begrijpen, dat b.v. $x^2 + 3x + 5$ een functie van x is, doordat „er geen y voor staat".) Natuurlijk dient t.z.t. ook het functionale verband ter sprake te komen [1]).

Vanzelf rijst nu de vraag: wanneer moet dan de Y-as geïntroduceerd worden? Ik vind dit een moeilijke vraag en voel mij bij de beantwoording niet geheel zeker. Toch wil ik een poging wagen. Ik heb getracht de Y-as in te voeren bij de bespreking van de impliciete functie $ax + by + c = 0$ en een andere keer bij de behandeling van de kwadratische functies. Beide pogingen vond ik mislukkingen: het bleek voor de leerlingen niet duidelijker, maar integendeel gecompliceerder te worden. Ik heb me toen afgevraagd, op welk moment we de Y-as *in de algebra* nodig hebben. En ik ben tot de conclusie gekomen, dat dit ogenblik niet was aan te wijzen, omdat we hem altijd konden missen. (Ik heb kandidaten op het staatsexamen herhaaldelijk fouten zien maken, die alleen daaruit voortsproten, dat ze de Y-as hadden getekend en nu die as dus ook ergens voor gebruiken wilden.) Het enige lichtpunt, dat ik zie, houdt verband met de inverse functies. Als men het verband tussen $y = f(x)$ en zijn inverse $x = g(y)$ grafisch wil toelichten, is het tekenen van een Y-as aangewezen. Maar deze Y-as is dan geen eigenlijke Y-as, maar heeft de rol van een „nieuwe X-as", die behoort bij $x = g(y)$, en heet alleen

[1]) Men behoeft zich er geen zorgen over te maken, dat dit niet geschieden zal. Een voorbeeld van een vraagstuk, waarin het begrip functionaal verband ter sprake komt, is het volgende.

Gegeven is de vergelijking $x^2 + (a - 1)x - a^2 = 0$. Druk de som s en het produkt p van de wortels in a uit. (Daar hebben we het functionale verband al.) Laat zien, dat er bij elke waarde van s één waarde van p behoort (weer een functionaal verband). Vind door eliminatie van a een betrekking tussen s en p (impliciete functie). Schrijf nu p als functie van s. Teken de grafiek van deze functie. — Hier heeft men het functionaal verband in al zijn geledingen.

Y-as, omdat het argument van deze functie met de letter y aangeduid wordt.

Doen we onze leerlingen te kort, als we hun in de algebrales de Y-as onthouden? Ik geloof het niet. In de wiskunde komen ze met een twee-assig coördinatenstelsel toch wel in aanraking, nl. bij de definitie van de goniometrische functies en in de analytische meetkunde [1]).

Blijft over de vraag, of deze zienswijze in verband met de toepassingen in de natuurkunde wel verantwoord is. De fysicus immers werkt steeds met een twee-assig coördinatenstelsel en het zou onjuist zijn te trachten hem tot andere gedachten in deze te brengen. Al vrij spoedig, naar ik meen het eerst bij de behandeling van de wet van Boyle, heeft hij dit soort grafieken nodig. Mag hij zijn wiskundecollega verwijten, dat deze (nog) geen twee-assig stelsel gebruikt heeft in zijn lessen? Ik zou daar het volgende op willen antwoorden. Geen enkele fysicus heeft ooit zijn wiskundecollega verweten, dat hij de asymptoten nog niet behandeld heeft, terwijl de bij de wet van Boyle behorende grafiek een orthogonale hyperbool is. Hij weet, dat dit niet mogelijk is. En als het voor het goed funderen van het functiebegrip nog niet gewenst is het twee-assige stelsel te bespreken, dan zal de fysicus dit als excuus wel willen aanvaarden. Ook voor hem is het van veel belang, dat het functiebegrip goed begrepen is en als dit het geval is, dan zal het hem niet veel moeite kosten de bedoeling van de verticale as duidelijk te maken.

Er is overigens een typisch verschil tussen het natuurkundige verband tussen p en V bij de wet van Boyle en het primitieve algebraïsche functiebegrip. In de wet van Boyle gaat het om het verband tussen twee grootheden, druk en volume. Geen van beide is daarbij primair en vandaar is het ook onlogisch met slechts één coördinaatas te werken. Bij het functiebegrip daarentegen is altijd één van beide variabelen primair, nl. het argument. Ook om deze reden is het niet geheel correct op grond van de omstandigheid, dat men bij twee symmetrische variabelen een twee-assig stelsel gebruikt, te eisen, dat men het in daarvan principieel verschillende gevallen in de algebra ook reeds zal doen.

Vanzelf brengt deze opmerking ons tot de vraag, welk onderwerp uit de algebra het meest verwant is aan het verband tussen p en V in de wet van Boyle. Het is duidelijk, dat dit de recht evenredige en

[1]) Laten we hopen, dat spoedig de analytische meetkunde ook op de h.b.s. ingevoerd zal worden, waardoor automatisch de behoefte om in de algebrales problemen te behandelen, die eigenlijk in de analytische meetkunde thuishoren, zal gaan verdwijnen.

omgekeerd evenredige afhankelijkheid is. Ook hier hebben we te maken met een verband tussen twee variabelen, waarbij geen van beide als de primaire behoeft aangezien te worden. Voorstanders van de introductie van de Y-as vinden hier mogelijk een welkome gelegenheid hiervoor. Zelf heb ik het nooit geprobeerd en kan dus moeilijk beoordelen, in hoeverre het didactisch gewenst is.

Ik geef direct toe, dat bovenstaande zienswijze een sterk subjectief karakter heeft en dus zou ik niet graag willen beweren, dat andersdenkenden ongelijk hebben. Het is slechts naast vele andere een mogelijke opvatting. Ik zou dus stellig niet willen opponeren tegen hen, die op de een of andere wijze de Y-as, mits niet in een te vroeg stadium, willen gaan gebruiken en acht dit zelfs alleszins verantwoord. Ik geloof anderzijds, dat het op goede gronden te verdedigen is, als men dit niet doet.

KALENDER

VACANTIECURSUS 1958

Onder voorbehoud van eventuele wijzigingen, geven wij hierbij het volgende programma voor de vacantiecursus 1958, welke zal worden gehouden te Amsterdam op maandag 25 en dinsdag 26 augustus 1958:

Thema: *„Historische en methodische aspecten van de algebra"*

Maandag 25 augustus 1958

10.45 — 11.45 Prof. Dr. E. M. Bruins: „Algebra van Oudheid en Middeleeuwen";
14.00 — 15.00 Prof. Dr. S. C. van Veen: „Hoofdstelling der Klassieke Algebra";
15.30 — 16.30 Prof. Dr. A. C. Zaanen: „Lineaire algebra en lineaire vectorruimten";

Dinsdag 26 augustus 1958

10.00 — 11.00 J. J. de Iongh: „Algebraïsche aspecten van de logica";
11.30 — 12.30 Prof. Dr. H. Freudenthal
14.00 — 15.00 Prof. Dr. W. Peremans
15.30 — 16.30 Prof. Dr. Ir. A. van Wijngaarden: „Numerieke algebra".

De heren Freudenthal en Peremans zullen in onderling overleg aspecten belichten van de moderne algebra en haar ontwikkelingsgang.

Van iedere voordracht wordt een syllabus verstrekt. Deelnemerskosten *f* 2,50, inclusief syllabus.

Aanmelding vóór 1 augustus a.s. bij de administratie van het Mathematisch Centrum onder overschrijving van *f* 2,50 op postgirorekening nr. 462890 of rekening M 2138 bij het Girokantoor van Amsterdam t.n.v. het Math. Centrum, met vermelding „Vacantiecursus 1958".

Waar de cursus in Amsterdam gehouden zal worden, zal nog aan de belangstellenden worden medegedeeld.

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

33e JAARGANG 1957/58

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

INHOUD VAN DE 33STE JAARGANG

ARTIKELEN.

LEZINGEN EN VOORDRACHTEN.

RAPPORTEN EN VERSLAGEN.

DIVERSEN.

BESPREKING EN AANKONDIGING VAN BOEKEN EN TIJDSCHRIFTEN.

Besproken boeken:

De 33ste jaargang stond onder redactie van Dr. J. H. WANSINK, H. W. LENSTRA, Dr. W. A. M. BURGERS, Dr. H. MOOY, Dr. D. N. VAN DER NEUT, Dr. H. TURKSTRA en Dr. P. G. J. VREDENDUIN.